Devoir maison n$^{\text{o}}$ 8

Exercice 1 à rendre le vendredi 10 janvier puis exercice 2 à rendre le vendredi 17 janvier

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. (*d'après CCINP TSI 2024*)
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Q2. En déduire alors que : $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{H_n} \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Puis, en remarquant l'égalité $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, en déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{H_n} \geqslant n + 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient initialement une boule noire. On effectue n tirages dans l'urne de la manière suivante :

- au cours de chaque tirage, on tire une boule de l'urne, puis on la remet dans celle-ci en y ajoutant une boule blanche ;
- on considère n tirages indépendants.

Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire définie par :

- $X_k = 0$ si la boule tirée lors du k-ième tirage est blanche ;
- $X_k = 1$ si la boule tirée lors du k-ième tirage est noire.

On définit enfin la variable Z_n par $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Q3. Que représente la variable Z_n ?

Q4. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Reconnaître la loi de X_k et préciser son espérance.

Q5. Vérifier que l'espérance de Z_n est H_n.

Q6. En utilisant **Q2**, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut espérer obtenir en moyenne au moins 4 fois la boule noire.
On pourra utiliser le fait suivant : $\mathrm{e}^4 \in \,]54\,;55[$.

Exercice 2. Tirages dans des urnes (*d'après ECRICOME 2018*)
On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

– le premier tirage a lieu dans l'urne U ;

– tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;

– si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne ;

– si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

Q1. Déterminer la loi de X_1.

Q2. a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0), \qquad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1), \qquad P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \qquad \text{et} \qquad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2).$$

b) En déduire la loi de X_2.

c) Vérifier que $E(X_2) = \dfrac{19}{18}$.

Q3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(X_n = 0)$.

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ème boule s'effectuera dans U.

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ème boule s'effectuera dans V.

Q5. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0).$$

Q6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$.

Déduire du résultat de la question précédente que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Q7. a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$.